

Descripción de textos escolares en torno al concepto de función a trozos ■

Recibido: 22 -02-2010 | Aceptado: 30-11-2010

Description of textbooks on the concept of piecewise function

Carolina Luque*

■ **Resumen:** En el presente trabajo son objeto de indagación tres textos utilizados para la enseñanza del cálculo en secundaria, con el objetivo de dar cuenta del tratamiento que se hace de las funciones definidas a trozos en cada uno de ellos, para identificar las ventajas y/o desventajas de las diferentes propuestas. La descripción se realiza atendiendo a las siguientes variables: introducción a la función definida a trozos, formalización, ejemplos y ejercicios propuestos, relación del concepto con otros conceptos, motivación y objetivos de aprendizaje. Se espera que los resultados expuestos en este artículo se conviertan en punto de partida para la reflexión de los aportes y limitaciones de los textos en la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

■ **Abstract:** In this study the authors analyze three texts used to teach calculus in high school, with the aim of accounting the treatment given in each of the functions defined in pieces, to identify the advantages or disadvantages of these different proposals. The description is made based on the following variables: Introduction to piecewise function, formalization, examples and proposed exercises, relationship of the concept to other concepts, motivation and learning objectives. It is expected that the results presented in this article become a starting point for reflection on the contributions and limitations of the texts in the teaching and learning of mathematical concepts.

Palabras clave: función definida a trozos, descripción, texto escolar, representación, ejemplo y ejercicio.

Keywords: Piecewise function, Description, Textbook, Representation, Example and exercise.

* Docente del Colegio Gabriel Echavarrria, Madrid Cundinamarca. carolina.luque@live.com

Introducción

Los libros de texto se constituyen en el recurso más utilizado por los profesores de matemáticas para la enseñanza, puesto que son una herramienta didáctica que marca las directrices del trabajo que se realiza en el aula; así lo confirma el TIMSS (Tercer estudio internacional en ciencias y matemáticas), al mostrar que *“el texto escolar es utilizado para decidir qué temas enseñar y cómo enseñarlos, así como para determinar cuáles ejercicios y problemas solucionar”* (Vargas, 2003, p. 9).

Los textos escolares no son solamente el recurso que utiliza el profesor de matemáticas para organizar el trabajo en el aula, también son el reflejo de la transposición didáctica de los conceptos matemáticos y los encargados de transmitir contenidos socialmente aceptados; por consiguiente, los libros también se constituyen en un recurso didáctico de apoyo para el aprendizaje de los estudiantes, al ser considerados como un material de consulta.

Según L. Peña (citado por Vargas, 2003, p. 8), el texto escolar puede considerarse como:

un valioso instrumento educativo, dado que materializa los programas curriculares, ayuda a la organización y administración del tiempo, presenta información verbal y gráfica estructurada pedagógicamente y propone actividades y ejercicios en sus páginas y fuera de ellas, que sirven para estimular y ayudar los procesos de pensamiento (Vargas, 2003).

Afirmaciones como la anterior hacen evidente la incidencia que tiene el libro de texto sobre los contenidos escolares y su influencia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Dada la importancia que se le otorga a los textos en el proceso educativo, resulta interesante indagar acerca del tratamiento que éstos dan a los objetos matemáticos, para inferir las implicaciones que tiene dicho tratamiento en la enseñanza y el aprendizaje de los mismos, en particular del concepto de función a trozos.

Es pertinente hacer una descripción de textos alrededor de las funciones definidas a trozos, porque este es uno de los conceptos básicos para iniciar a los alumnos en el aprendizaje del cálculo. Según Samper y Leguizamón (1999, p. 103) *“Un buen manejo de las funciones a trozos permite una mejor comprensión de muchos conceptos básicos del cálculo, tales como límites unilaterales, continuidad y derivadas unilaterales, entre otros”*, además *“para llegar a la expresión algebraica de tales funciones se debe hacer uso de desigualdades, valor absoluto, y otros temas de álgebra y de la lógica proposicional”*. Estas afirmaciones no sólo muestran la importancia de las funciones definidas a trozos en la enseñanza del cálculo, sino que también evidencian cómo, a partir de su estudio, se puede profundizar en otros tópicos de la matemática.

El presente artículo es el resultado de un trabajo de grado en el que se describieron tres textos utilizados para la enseñanza del cálculo en secundaria con el objetivo de dar cuenta del tratamiento que se hace en cada uno de la función definida a trozos, para luego identificar las ventajas y/o desventajas de las diferentes propuestas.

Para dar cuenta del trabajo realizado, en este artículo se dan a conocer los siguientes aspectos del estudio: antecedentes de investigación sobre análisis de textos en matemáticas (es pertinente señalar que en la literatura revisada no se encontraron

análisis de textos relativos a las funciones definidas a trozos), referente teórico que guió la descripción de textos, metodología utilizada para la descripción y descripción de los textos seleccionados de acuerdo con las siguientes variables: introducción a la función definida a trozos, formalización del concepto, situaciones que hacen parte del tratamiento de la función definida a trozos, relación del concepto con otros conceptos, motivación y capacidades que se pretenden desarrollar en el estudiante. Finalmente se plantean algunas conclusiones derivadas de la descripción realizada.

Se espera que los resultados expuestos en este artículo aporten información a los docentes que les permita tomar decisiones frente a la enseñanza y el aprendizaje de las funciones definidas a trozos a nivel de secundaria y que, además, se convierta en un punto de partida para reflexionar en torno a los aportes y las limitaciones de los libros de texto en la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

Antecedentes de investigación sobre análisis de textos en matemáticas

El texto escolar y su importancia dentro del proceso educativo

González y Sierra (2004, p. 391) afirman que puede denominársele libro de texto al manual que utilizan tanto profesores como alumnos a lo largo de un curso escolar en el proceso educativo de un área del conocimiento, es decir, se consideran libros de texto los diseñados para ser usados en el ámbito escolar.

Por otro lado, Ramírez (2002, citado por Solano, 2006, p. 51) define el texto escolar como:

un recurso didáctico, que puede ser de sustrato material o virtual, en el cual se materializa un discurso compuesto por palabras, palabras y símbolos o palabras, símbolos e ilustraciones, estructurado de manera secuencial y sistemática en atención a la maduración intelectual y emocional del lector, y creado con la intención expresa de ser utilizado como un recurso pedagógico en el proceso de enseñanza-aprendizaje del sistema escolar formal, con el fin de brindar información sobre algún área del conocimiento en atención a la oferta curricular establecida en los programas de estudio, elaborados por las autoridades educativas nacionales, quienes a su vez autorizan, supervisan y reglamentan sus contenidos, extensión y tratamiento.

Este autor ofrece una definición más amplia con respecto a lo expuesto por González y Sierra, dado que, además de aceptar que es un recurso pedagógico, expresa que el texto se corresponde con las necesidades intelectuales del lector y se adapta a las disposiciones oficiales que existen en relación con el currículo.

En este sentido, una de las funciones de los libros de texto es divulgar las reformas del sistema educativo y hacer que éstas sean aceptadas socialmente. Espitia, García y Serrano (1997, p. 3) plantean que en Colombia los libros, junto con los programas, han sido los únicos medios encargados de impulsar la transformación en cuanto a contenidos y exigencias didácticas de renovación.

Además de divulgar disposiciones ministeriales, los libros de texto también desempeñan otras funciones en el ambiente escolar, como objeto de estudio, material de consulta, cuaderno en el que alumno desarrolla algunas actividades, lección de ejerci-

cios propuestos y problemas a resolver, etc. (González y Sierra, 2004, p. 389). Los diferentes roles que puede jugar el texto en el aula de matemáticas, lo han convertido en un material didáctico que determina la práctica escolar y la organización de la enseñanza. Según Choppin (1980, citado por González y Sierra, 2004, p. 389), en el proceso educativo es el libro de texto el que impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos y contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de alumnos como de profesores; es un instrumento de poder, que contribuye a la uniformización lingüística de la disciplina, a la nivelación cultural y a la propagación de ideas dominantes.

El protagonismo del texto escolar en el aula y en el proceso educativo, ha llevado a que los educadores matemáticos consideren este material didáctico como objeto de investigación. Ramírez (2002, citado por Solano, 2006, p. 28) afirma que con respecto al texto escolar se puede indagar sobre “sus contenidos (y sus vacíos), la manera como éstos se organizan y enfatizan, los valores, estereotipos, prejuicios que trasmite y deja de transmitir”. Según este autor, la relación entre la manera como se organizan los contenidos en el texto escolar y la correspondencia de esta organización con los programas curriculares, es uno de los ejes problematizadores que hacen del texto escolar un objeto de investigación.

Metodología para el análisis de textos

Hasta el momento se han citado algunos referentes teóricos en relación con la importancia de los textos escolares en el proceso educativo y se han dado algunas razones de por qué los textos deben ser un objeto de estudio para los educadores matemáticos. En este apartado se darán a conocer algunos antecedentes en relación con la metodolo-

gía que han utilizado algunos investigadores en el análisis de textos de matemáticas.

Sierra, González y López (1999, pp. 464-465, 2003, pp. 22-24) en sus trabajos sobre la evolución histórica del límite funcional y el concepto de continuidad en los manuales españoles de la segunda mitad del siglo XX, plantean las siguientes etapas para el análisis de textos: elaboración de fichas con los datos fundamentales del libro (título, autor/es, editorial, año de edición, plan de estudios y un resumen del contenido de los capítulos relacionados con el tema); elaboración de cuadros comparativos de los libros, incluyendo el modo de introducción del concepto (formal, heurístico o constructivo), tipo de definición (topológica, métrica, geométrica o por sucesiones), secuencia de contenidos (listado de las definiciones y propiedades relacionadas con la continuidad, numerándolas según su orden de aparición), tipos de ejercicios y problemas.

Atendiendo a aspectos similares, Espita, García y Serrano (1997, p. 53) expresan que, de acuerdo con Weber (1986), el análisis de contenido de textos escolares debe dar cuenta del modelo didáctico seguido en la presentación del concepto, la definición, los ejemplos propuestos y las relaciones establecidas entre el concepto y los objetos matemáticos asociados.

Por otro lado, Sánchez y Contreras (1998, p. 77), en un análisis de manuales alrededor del concepto de límite funcional desde la noción de obstáculo, afirman que el análisis de contenido de textos debe considerar las siguientes variables: forma de introducir la noción (ejemplo, definición), definición con la que se formaliza la noción, ejemplos que aparecen en los apartados anteriores, concepciones que se derivan del manual, y obstáculos y dificultades que se extraen de los contenidos.

Los autores mencionados coinciden en señalar que para dar cuenta del tratamiento que se hace de un concepto matemático en los textos escolares, es necesario determinar categorías que permitan indagar sobre el contenido de los textos en términos de un concepto en particular. Los autores citados coinciden en algunas categorías, a saber, forma de introducir el concepto, tipo de definición, ejemplos y ejercicios, y secuencia didáctica seguida en el tratamiento del concepto. Estas categorías hacen parte de las establecidas para la descripción que se reporta en este artículo.

En relación con la elección de los textos a analizar, Sánchez y Contreras (1988) manifiestan que existen diversos criterios de selección: seleccionar la obra de todo un autor, seleccionar los textos más utilizados en un lugar o un periodo determinado de una asignatura específica, etc. Según Perilla y Vargas (2003, p. 36), también se puede optar por seleccionar manuales y textos históricos, seleccionar textos que tengan desde su primera aparición un concepto específico o seleccionar textos con dos enfoques diferentes (por ejemplo científicos y técnicos). Como puede notarse, la selección de los textos puede estar sujeta a criterios diferentes, lo importante es que éstos se correspondan con los objetivos propuestos para el análisis.

Referente teórico

Las representaciones en la enseñanza y el aprendizaje de la función

Para este estudio se asumió la propuesta de Font (2005), la cual es una adaptación de los planteamientos de Janvier (1987) en rela-

ción con el papel que juegan las representaciones en el aprendizaje y la enseñanza del concepto de función.

Janvier (1987, citado por Font 2005, p. 11) considera cuatro representaciones asociadas al concepto de función: expresión verbal, expresión analítica, representación tabular y representación gráfica. Este autor afirma que el aprendizaje de los conceptos matemáticos no debe limitarse al estudio de una sola representación, sino que es necesario incluir la capacidad de convertir la información de una representación a otra y la habilidad de realizar traducciones entre el mismo tipo de representación. Siguiendo los planteamientos de este autor, Font (2005) propone posibles conversiones y tratamientos (diagonal de la Tabla 1) entre los diferentes modos de representación de un concepto (Ver Tabla 1).

De acuerdo con la Tabla 1, uno de los procesos de conversión que se pueden dar entre las diferentes representaciones, es el tránsito de la representación tabular a la expresión algebraica. Esta conversión consiste en utilizar los datos que se tienen en una tabla de valores, para llegar a la generalización de una fórmula, en la que se resume la relación de dependencia entre las dos variables consideradas. Según Font (2005), llegar a esta generalización no es una tarea fácil para los estudiantes, puesto que establecer una relación funcional por medio de una expresión simbólica requiere de abstraer la relación de dependencia que hay entre las dos variables, relación que debe inferirse de los datos parciales que muestra el registro tabular.

Según Castro (1997, p. 109), las representaciones son importantes para adquirir dominio de los conceptos, dado que estas ofrecen signos o figuras que actúan como expresiones del concepto. Por ejemplo, la

Tabla 1. Adaptación de Font (2005, p. 11) a la tabla propuesta por C. Janvier

Hacia Desde	Descripción verbales	Tabla	Gráfica	Expresión simbólica
Descripciones verbales	Distintas descripciones	Estimación / cálculo de la tabla	Boceto	Modelo
Tabla	Lectura de las relaciones numéricas	Modificación de la tabla	Trazado de la gráfica	Ajuste numérico
gráfica	Interpretación de la gráfica	Lectura de la gráfica	Variaciones de escalas, unidades, origen, etc.	Ajuste gráfico
Expresión simbólica	Interpretación de la fórmula	Cálculo de la tabla dando valores	Representación gráfica	Transformación de la fórmula

situación propuesta en el Cuadro 1, en la que se describe el interés de ahorro que ofrece una empresa a sus trabajadores de acuerdo con el ahorro mensual que hacen, es una expresión verbal del concepto de

función definida a trozos. Este modo de representación expresa de manera cualitativa la relación de dependencia existente entre el monto del ahorro del trabajador y el interés que le ofrece la empresa.

El gerente de la empresa “Tejidos La Araña”, para estimular el ahorro de sus empleados, cuyos sueldos mensuales oscilan entre \$210.000 y \$500.000, ha propuesto un plan en el cual la empresa dará aportes según lo ahorrado cada mes por el empleado. El plan es el siguiente:

- Si el empleado ahorra \$10.000 o menos, el aporte de la empresa es de 5% de lo que ahorra.
- Si lo ahorrado esta entre \$10.000 y \$50.000, el aporte de la empresa será de \$500 más el 3% de lo ahorrado.
- Si el ahorro es de \$50.000 o más, la empresa aportará el 3% de lo ahorrado más \$1.000.

Cuadro 1. Ejemplo tomado de Samper y Leguizamon (1999, p. 104).

Las definiciones, los ejemplos y ejercicios en los libros de texto

Azcarate y Deulofeu (1996, p. 19), afirman que en los libros de texto se manifiesta la misma dificultad que se presentó en la historia del desarrollo del concepto *función* al tratar de definirlo. El problema básicamente está en encontrar una definición que sea útil y operativa, que no sea demasiado intuitiva y carezca de rigor, pero que tampoco sea una definición rigurosa que resulte muy lejana de los problemas concretos a los que se enfrentan los estudiantes en aula.

Ante esta dificultad, resulta difícil establecer un criterio estándar que permita definir el concepto en un nivel elemental. Sierpinska (1992, p. 23), manifiesta que *“si examinamos el contexto en el cual la noción general de función vino a la vida, será claro por qué la síntesis de la noción general de función es tan difícil en los estadios tempranos de la experiencia matemática”*.

Como consecuencia de dicha dificultad, en los libros de texto se presentan diversas definiciones; cada una de ellas resalta un invariante y un tipo de representación particular del concepto. Las definiciones que suelen encontrarse en los textos, según Espitia, García y Serrano (1997, p. 40), pueden clasificarse de la siguiente manera, de acuerdo con el aspecto que destacan: correspondencia entre valores de variables, correspondencia entre elementos de dos conjuntos, dependencia entre dos variables, conjunto de pares ordenados, relación entre dominio e imagen (estado inicial y estado final), cambio de la variable dependiente.

Sierpinska (1992, p. 26) afirma que la definición conjuntista no es la más adecuada para introducir el concepto a un nivel elemental, puesto que los estudiantes en este nivel no van a operar sobre

espacios de funciones, ni con teoremas generales sobre continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad, así como tampoco van a discriminar entre el concepto de función y relación. En cambio, considera que desde el punto de vista didáctico, las definiciones informales semejantes a la de Dirichlet son suficientes a nivel de secundaria, es decir, definiciones como:

Si una variable x está relacionada con otra variable y de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x , una regla según la cual queda determinado un único valor de y , entonces se dice que y es una función de la variable independiente x (Azcarate, Deulofeu, 1996, p. 52).

Azcarate y Camacho (2003, p. 14) por su parte, presentan un cuestionamiento acerca del papel que juegan las definiciones en los textos, afirmando que *“los autores de libros de texto... dan por supuesto que se produce el aprendizaje a partir de las definiciones y que en la resolución de problemas y realización de tareas son éstas las que se activan en la mente del estudiante y controlan el proceso”*. Desde esta perspectiva, las definiciones son consideradas como una descripción de los objetos matemáticos, suficiente para adquirir los mismos, lo cual no es cierto. Según Sierpinska (1992, p. 24), las definiciones pueden llegar a ser ignoradas e incluso incomprendidas cuando se hace una introducción temprana de la definición del concepto, específicamente del concepto general de función.

Además de las definiciones, en la estructura de cualquier texto utilizado para la enseñanza de un área del conocimiento hay otros dos elementos que parecen ser obligados en su diseño: los ejemplos y ejercicios. En la mayoría de los libros para la enseñanza de las matemáticas, se encuentra que hay cierto número de páginas dedicadas a la

exposición de ejemplos y el planteamiento de ejercicios para el lector.

Según González (1993, citado por Ortiz, 2002, p. 129), la enseñanza de las matemáticas incluye, entre otras decisiones, la selección de los ejemplos que hay que presentar al alumno y de los ejercicios que se deben resolver; es quizá esta la razón por la cual son fundamentales los dos elementos mencionados anteriormente en los textos diseñados para la enseñanza de las matemáticas. Cabe señalar que los marcos de ejemplificación y ejercitación en el campo educativo, solamente son desarrollados por dos de los agentes de este proceso, por el profesor o los autores del texto escolar, de ahí la importancia de revisar los ejemplos y ejercicios que se proponen en los textos de matemáticas.

Varios autores coinciden en afirmar que la importancia de incluir ejemplos y ejercicios en los libros escolares, radica en que éstos contribuyen a que los estudiantes adquieran los conocimientos que son enseñados en la escuela. Ortiz (2002, p. 129) plantea que tanto el número y variedad de ejemplos que se incluyen para ilustrar un concepto, como las experiencias acumuladas por los estudiantes al realizar los ejercicios, fomentan el aprendizaje de tareas particulares en los mismos.

Por otro lado, González (1993, citado por Ortiz, 2002, p. 129) plantea que la práctica más común en los textos es mostrar al alumno algunos ejemplos del concepto antes o después de haberlo definido y estudiado sus propiedades, para luego asignarle algunos ejercicios con el fin de reforzar lo visto. Los ejemplos y ejercicios, desde esta perspectiva, son fundamentales porque se supone que los estudiantes ganan maestría o adiestramiento en el tema a través del trabajo con los mismos.

En los planteamientos anteriores subyace otra de las características fundamentales de los textos de matemáticas: los ejemplos y ejercicios suelen presentarse para ser considerados de acuerdo con las herramientas conceptuales que les preceden en el orden y la secuencia estipulada por el autor, es decir, las ejemplificaciones y las ejercitaciones siempre están ubicadas en un contexto.

Según Ortiz (2002, p. 129), pueden considerarse dos tipos de ejemplos:

- Las tareas resueltas, que generalmente sirven para mostrar al alumno el proceso de resolución de otros ejercicios similares que se incluyen posteriormente.
- Ejemplificación de conceptos o de propiedades de conceptos antes o después de la correspondiente definición.

En cuanto a los ejercicios, Guacaneme (1999, p. 114) manifiesta que, al contrario de todas las vías de ejemplificación, estos son solucionados directamente por el interlocutor o lector del texto escolar de matemáticas, es decir, son considerados como ejercicios, aquellas tareas que se presentan sin resolver y con indicaciones precisas que le sugieren al alumno hallar su solución.

Metodología

Como se mencionó en los antecedentes, los criterios para elegir los textos a analizar pueden ser diversos, lo importante es que se correspondan con los objetivos propuestos para el análisis. En particular, en este estudio se propusieron los siguientes criterios de selección:

- Textos en los que el concepto de función a trozos fuera una temática a abordar.

- Textos en los que se atendiera a diferentes reformas curriculares. En particular, textos en los que se presentaran los aprendizajes esperados por los estudiantes en términos de objetivos, logros y estándares. Vale la pena señalar que en la búsqueda de los textos no fue posible encontrar un libro que planteara aprendizajes en términos de

logros e indicadores, y además profundizara en el tema de las funciones definidas a trozos, por tanto se optó por seleccionar un texto cuyos aprendizajes se presentan con base en competencias tipo ICFES.

Siguiendo estos criterios, los libros seleccionados fueron:

Tabla 2. Textos seleccionados para la descripción.

	Autores	Título	Editorial y año de edición	Forma de presentar los aprendizajes esperados por los estudiantes
Texto 1	Gabriel Jaime Osorio, José Israel Berrío Molina y Julio Uribe	Elementos de matemáticas 11	Editorial Bedout, 1985	Objetivos
Texto 2	Hugo Hernán Chávez López y Sandra Genoveva Castiblanco García	Matemáticas 11	Santillana 2000	Competencias tipo ICFES
Texto 3	Raquel Ardila de Rebolledo, Mario Ernesto Pérez Ruíz, Carmen Samper de Caicedo y Celly Serrano de Plazas	Espiral 11	Norma, 2005	Estándares y competencias

Según Fox (1981, citado por Ortiz, p. 49), el análisis de contenido comienza por elegir la unidad de contenido a analizar, luego se elabora un conjunto de categorías, junto con un fundamento lógico que sirva para asignar las unidades a estas categorías. Siguiendo los planteamientos de este autor y tomando algunas de las categorías señaladas en los antecedentes de este estudio, se establecieron las siguientes categorías de descripción o descriptores:

- Introducción la función definida a trozos: nociones previas al concepto de función a trozos y forma de introducir dicho concepto (primera aparición del *concepto* en el texto, en cualquiera de sus representaciones, antes de ser formalizado).
- Formalización del concepto: tipo de definición, representaciones asociadas a las funciones definidas a trozos, y procesos de tratamiento y conversión.
- Situaciones que hacen parte del tratamiento de la función definida a trozos: ubicación y finalidad de los ejemplos y ejercicios, contexto en el que se desarrollan los ejemplos y ejercicios, y coherencia de los ejemplos y ejercicios con la definición
- Relación del concepto con otros conceptos: conceptos posteriores relacionados con la función definida a trozos.
- Motivación: importancia del concepto y su utilidad futura.
- Capacidades que se pretenden desarrollar en el estudiante: propósitos generales y específicos que están implícitos y/o explícitos en el texto.

Descripción de los textos

Introducción a la función definida a trozos

La descripción de los textos seleccionados se inicia con la revisión de las unidades y secciones previas al apartado dedicado al estudio de las funciones definidas a trozos, para dar cuenta de los temas que se abordan previamente al concepto en cuestión e identificar cuándo y en qué sección se da la primera aparición de este tipo de funciones.

En relación con los conceptos previos al concepto de función a trozos, los tres textos coinciden en abordar temas como: intervalos y sus diferentes representaciones, desigualdades, conjunto y operaciones entre conjuntos, función, dominio y rango de una función y funciones polinómicas.

Aunque los tres textos coinciden en abordar ciertos temas, no concuerdan en analizar otros que también son importantes en el estudio de las funciones a trozos o por partes. Por ejemplo, en el texto 3 no se define previamente el valor absoluto, lo cual es importante porque esta definición, en algunos casos, permite que se den procesos de tratamiento en la representación algebraica del concepto en cuestión.

Los tres textos tampoco coinciden en los diferentes tipos de funciones que consideran antes de abordar las funciones definidas a trozos. En el texto 1, se manifiesta que en cursos anteriores ya se han abordado las funciones polinómicas y trascendentes; en el texto 2, se han estudiado funciones polinómicas, radicales, racionales y trascendentes; y en el texto 3, solamente se han estudiado las funciones racionales y polinómicas.

Vale la pena resaltar que aunque en el texto 1 los autores manifiestan un interés particular por el estudio de las funciones definidas a trozos, las herramientas conceptuales previas no son suficientes para el estudio de las mismas. En el texto se plantean métodos (los cuales consisten en despejar x y y para obtener una sola expresión que permita identificar los valores de x y y , en los que la función no está definida) para hallar el dominio y el rango de las funciones de variable real; estos métodos son viables (o por lo menos así se muestra en el texto) para funciones que se definen algebraica-

mente con una sola expresión, mas no para funciones definidas a trozos.

Otro de los aspectos a resaltar, es que en ninguno de los tres textos, previo a las funciones definidas a trozos, se han planteado situaciones en las cuales se pida representar gráficamente funciones definidas por una sola expresión que tengan su dominio restringido a un intervalo.

Por último, los tres textos coinciden en presentar la definición formal de función como una correspondencia entre dos conjuntos:

Dados dos conjuntos no vacíos A y B , una función f de A en B , denotada por: $f: A \rightarrow B$ o $f: A \rightarrow B$, es una relación que permite asignar a todo elemento $x \in A$ uno y solo un elemento $y \in B$. Definición tomada del texto de Matemáticas 11).

En cuanto a la forma de introducir el concepto de función definida a trozos, la revisión de los textos permitió observar que este tipo de funciones suelen mencionarse y utilizarse en los libros mucho antes de referirse a sus características e incluso de darles un nombre especial. Por ejemplo, en el texto 3, además de involucrar funciones definidas a trozos en el tratamiento de conceptos preliminares, se hace una introducción al tema por medio de una situación (Cuadro 2) que puede ser modelada con una función por partes.

Una empresa de correos usa la siguiente tabla de tarifas para determinar el valor del envío de documentos a uno de los países vecinos

Cuadro 2. Ejemplo tomado del Texto Espiral 11.

Peso (Kg)	Tarifa \$
(0,0,5)	72.000
(0,5,1)	94.000
(1,1,5)	106.000
(1,5,2)	122.000
(2,2,5)	138.000
(2,5,3)	154.000
(3,3,5)	170.000
(3,5,4)	186.000
(4,4,5)	202.000
(4,5,5)	222.000

Como se había expuesto con anterioridad, Azcarate (2003) hace una fuerte crítica a los autores de texto al afirmar que éstos suponen que se produce el aprendizaje a partir de las definiciones, y que en la solución de determinadas tareas, son éstas las que marcan las directrices del proceso. Dicho supuesto puede evidenciarse en los textos 2 y 3, en los cuales se opera con las funciones definidas a trozos luego de haber presentado el concepto general de función y sin antes haber indagado acerca de sus características y propiedades. En estos textos, de manera implícita, se parte del supuesto de que los procedimientos matemáticos, como el evaluar algunos puntos de una función por partes o el representarla gráficamente, resultan ser análogos a los procedimientos que se siguen con una función definida por una sola expresión, lo cual no es cierto, puesto que a diferencia de las demás funciones, las que están definidas a trozos están sujetas a las condiciones del dominio.

Formalización del concepto

Luego de indagar acerca de la introducción de la función definida a trozos que se hace en los textos, se procedió a hacer la revisión del apartado correspondiente a esta clase de funciones con miras a identificar el tipo de definición o expresiones con las que se formaliza el concepto, y dar cuenta de los modos de representación que se utilizan en el estudio de las funciones definidas a trozos y de los procesos de tratamiento y conversión que se explicitan en dicho apartado.

En relación con el tipo de definición, la descripción permitió observar que las funciones definidas a trozos, en los tres textos, se consideran como un tipo especial de función cuya característica principal es estar definidas por varias expresiones según sea la partición del dominio.

En las expresiones que se utilizan para formalizar este tipo de funciones, subyace el término *función*, el cual, en los tres textos, coincide en que es presentado formalmente como una correspondencia entre conjuntos, por tanto se deduce que las funciones a trozos deben ser entendidas como un caso particular de esta definición.

En los tres textos también se resalta otra de las características fundamentales de las funciones definidas a trozos, y es que el dominio es la unión de los diferentes intervalos en los que se divide. Vale la pena resaltar que en el texto 3, a diferencia de los otros dos, se hace mención a que la intersección de los intervalos en los que se divide el dominio debe ser vacía, lo cual es importante para que se cumpla la definición de función.

Con respecto a las representaciones asociadas a las funciones definidas a trozos, se destacan los siguientes aspectos:

- En los tres textos (a excepción del texto 2, que no hace énfasis en la representación tabular de este tipo de funciones) se presentan los cuatro modos de representación de las funciones definidas a trozos.
- En los tres textos se dan pocos procesos de tratamiento, de hecho solamente se presentan procesos de tratamiento en la expresión analítica.
- A pesar de que en los tres textos se presenta la representación verbal de las funciones definidas a trozos, dicha representación se da en contextos diferentes, es decir, en el texto 1 se hace una descripción en términos matemáticos de la función a trozos, en cambio, en los otros dos textos, se proponen situaciones de otras áreas del conocimiento en las que subyace este concepto.

- Cabe destacar que, a pesar de que en los tres textos se presentan por lo menos tres representaciones distintas del concepto, existe el privilegio por el trabajo con la representación analítica y gráfica de las funciones definidas a trozos.

En cuanto a los procesos de conversión, tabla continuación (Tabla 3) se resumen las conversiones encontradas en los tres textos analizados.

Como puede evidenciarse en la tabla anterior, los procesos de conversión que más se privilegian en el tratamiento de las funciones definidas a trozos, est n relacionados con los que pueden darse entre la representación analítica y las demás representaciones, en especial la representación gráfica. De acuerdo con la tabla, también

es posible afirmar que en el tratamiento de este tipo de funciones no son frecuentes los procesos de conversión entre la representación tabular y los demás modos de representación del concepto en cuestión, así como tampoco es frecuente mostrar el paso de la representación gráfica a otro tipo de representación.

El hecho de que en los textos no sean frecuentes los procesos de conversión entre la representación tabular y los demás modos de representación, puede explicarse desde lo expuesto en el referente teórico, en el cual se puso en conocimiento la dificultad (del paso de la representación tabular a la algebraica) que se presenta al tratar de abstraer la relación de dependencia de dos variables a partir de los datos parciales que muestra un registro tabular.

Tabla 3. En la tabla, el color gris oscuro indica los procesos de conversión que se presentan en los textos, y el gris claro, los tipos de conversión que no aparecen en los libros escogidos.

De la representación	A la representación	Texto 1	Texto 2	Texto 3
Verbal	Gráfica			
	Tabular			
	Analítica			
Gráfica	Verbal			
	Tabular			
	Analítica			
Tabular	Verbal			
	Analítica			
	Gráfica			
Analítica	verbal			
	Gráfica			
	Tabular			

Situaciones que hacen parte del tratamiento de la función definida a trozos

Para dar cuenta de las situaciones que hacen parte del tratamiento de la función definida a trozos en los textos escogidos, se observó, en primer lugar, la ubicación y finalidad de los ejemplos y ejercicios, posteriormente, el contexto en el que se desarrollan (contexto matemático o contextos que sugieren la aplicación de las matemáticas a otras áreas del conocimiento o la vida real), y por último, la coherencia de estos con la definición, es decir, se revisó si en los ejemplos y ejercicios propuestos subyace la definición dada.

En cuanto a la ubicación de los ejemplos y ejercicios, se encontró que en los textos 1 y 2, los ejemplos se presentan luego de haber formalizado el tema de las funciones definidas a trozos. En el texto 3, a diferencia de los otros dos, se presenta una situación (Cuadro 2) que, a pesar de no ser un ejemplo explícito, puede considerarse como un ejemplo introductorio del concepto, puesto que se presenta antes de la formalización y además ilustra el uso de este concepto en situaciones de la vida real.

Con respecto a los ejercicios, en los tres textos se presentan en un apartado exclusivo, luego de haber formalizado y ejemplificado las funciones definidas a trozos. En ninguno de los textos, en el apartado dedicado a las funciones definidas a trozos, hay ejercicios introductorios, es decir, ejercicios propuestos antes de formalizar el concepto o que se propongan durante la explicación del mismo.

A continuación (Tabla 4), se muestra la cantidad de situaciones que se presentan en cada texto (en el apartado dedicado al estudio de este tipo de funciones y los ejercicios que proponen al finalizar la unidad de

funciones) en relación con la función definida a trozos:

Tabla 4.

Tipo de actividad	Texto 1	Texto 2	Texto 3
Ejemplo introductorio	0	0	1
Ejemplo posterior	3	1	3
Ejemplo introductorio	0	0	0
Ejercicio posterior	15	19	28
Total	18	20	32

Como puede observarse en la tabla anterior, el número de ejemplos que se presentan en los textos es inferior a la cantidad de ejercicios que se proponen de cada uno de ellos. Los ejemplos tienen como finalidad mostrar al lector un procedimiento a seguir en relación con la representación gráfica, el dominio y el rango de una función dada por medio de una expresión algebraica. En el texto 3 también se presentan ejemplos, cuyos propósitos son mostrar procesos de tratamiento en la representación analítica y establecer conjeturas al comparar dos o más funciones dadas, por ejemplo, al comparar funciones como:

$$f(x) = x^3, g(x) = |x^3|$$

Por otro lado, se encontró que el tipo de ejercicios propuestos en los textos puede clasificarse, según su finalidad, (Tabla 5) de la siguiente manera:

Tabla 5. González (1993) plantea que lo más común en los textos, es presentar a los alumnos ejemplos del concepto antes y/o después de haberlo definido y luego asignar algunos ejercicios para reforzar lo visto. Dicha práctica común pudo evidenciarse en los tres textos.

Objetivo de la actividad	Texto 1		Texto 2	
	N� de ejercicios	Tipo de actividad	N� de ejercicios	Tipo de actividad
Repetir los procedimientos exhibidos en ejemplos previos	15	Graficar, hallar dominio y rango		
Incentivar procesos de conversión que no han sido ejemplificados con anterioridad			2	Dada una situación problema se pide hallar la gráfica o la ecuación que muestra la relación entre las dos variables consideradas
			13	Dada la fórmula de la función hacer su gráfica
Conjeturar acerca del comportamiento gráfico de las funciones valor absoluto y parte entera				
Operar con las funciones definidas a trozos			4	Hallar la función suma, producto, cociente, inversa, compuesta, dadas dos funciones (las dos a trozos o por lo menos una de ellas)

Texto 3	
Nº de ejercicios	Tipo de actividad
8	Graficar, hallar dominio y rango, calcular algunos puntos de la función y encontrar puntos de discontinuidad.
6	Comparar y conjeturar acerca de lo que sucede con las graficas de las funciones: $y=f(x)$ y $y=f'(x)$
3	Dada la representación gráfica encontrar la expresión simbólica.
1	Dada una situación problema, calcular algunos puntos de la función, realizar la gráfica, los puntos de discontinuidad y compararla con la función parte entera.
1	Dada la descripción verbal de una función hallar su correspondiente gráfica y fórmula
1	Dada la expresión analítica, se pide explicar por qué es una función, explicar el significado de la misma para un conjunto de valores de la variable independiente y buscar una situación que se pueda modelar con dicha ecuación.
8	Dada la función parte entera y valor absoluto se pide hacer transformaciones de las mismas y deducir en qué casos se dan transformaciones como dilatación, corrimiento de la gráfica a la derecha, etc.

Con la descripción realizada, también se puso en evidencia la diferencia en la finalidad de los ejemplos y ejercicios en cada texto. Se observó que los ejemplos pasaron de mostrar solamente procedimientos a seguir (texto 1) a exhibir tareas en las que se plantea la posibilidad de descubrir características propias de las funciones definidas a trozos (texto 3). En cuanto a los ejercicios, en el texto 1, éstos tenían una sola finalidad, repetir los procedimientos exhibidos en ejemplos, en cambio en los textos 2 y 3, los ejercicios se mostraron como tareas propicias para incentivar procesos de conversión no ejemplificados con anterioridad, plantear conjeturas acerca del comportamiento gráfico de algunas funciones definidas a trozos y realizar operaciones funcionales con funciones a trozos.

En cuanto al contexto en el que se desarrollan los ejemplos y ejercicios, se pudo evidenciar que los tres textos coinciden en presentar, en su mayoría, ejemplos y ejercicios en un contexto puramente matemático. Si bien los textos 2 y 3 presentan situaciones en otros contextos, estas son pocas en relación con las que se presentan en un contexto matemático. En el texto 2, dos ejercicios de los 19 se presentan en un contexto no matemático, y en el texto 3, el ejemplo introductorio ilustra el uso de las funciones por partes en una situación de la vida real, y tan solo uno de los ejercicios, de los 28 que se proponen en este libro, está en un contexto diferente al matemático.

Los ejemplos y ejercicios que indican una aplicación del concepto coinciden en ser situaciones que relacionan dinero con alguna otra magnitud (peso, tiempo), es decir, modelan situaciones económicas.

En relación con la coherencia de los ejemplos y ejercicios, se encontró que en los textos 1 y 2 no se proponen ejercicios o

ejemplos en los que se indague acerca del por qué las expresiones estudiadas corresponden efectivamente a relaciones funcionales, se decir, después de dar la definición conjuntista no se presentan situaciones en la que se vea la necesidad de evocarla. En cambio en el texto 3, se proponen tareas en las cuales es necesario recurrir a la definición de función para resolverlas.

Relación del concepto con otros conceptos

La relación de las funciones definidas a trozos con otros conceptos se manifiesta en la aparición de estas en el tratamiento de conceptos posteriores. De acuerdo con la descripción realizada, se sigue que las funciones definidas a trozos son útiles para contradecir algunas de las deducciones falsas que surgen cuando los estudiantes se inician en el estudio del cálculo, puesto que este tipo de funciones se prestan para poner en evidencia la falsedad de creencias como las siguientes: es lo mismo evaluar la función en un punto que calcular el límite de la misma en dicho punto, o el recíproco del teorema que relaciona la derivabilidad de una función con su continuidad es válido.

Las funciones por partes no sólo son útiles como contraejemplo; también son ideales para determinar características propias de algunas funciones, por ejemplo, a partir de este tipo de funciones es posible deducir las características de las funciones que no son derivables en un punto.

Muchas situaciones que se presentan en el estudio de los problemas de razón de cambio, conllevan a considerar funciones definidas a trozos, por tanto, este tipo de funciones no pueden considerarse un tema trivial u obviado en el estudio del cálculo e incluso de la física. Las situaciones más comunes que se modelan con este tipo de

funciones, son las que relacionan la distancia o velocidad con el tiempo.

Motivación

En los textos 1 y 2 no hay nada explícito en relación con la importancia y la utilidad futura de las funciones definidas a trozos, sin embargo, en estos dos textos se resalta la importancia de las funciones en general para expresar matemáticamente la relación existente entre dos magnitudes.

En el texto 3, la importancia de estas funciones en el estudio de las matemáticas se manifiesta al afirmar que estas son de utilidad para ilustrar características de las funciones, tales como continuidad, derivabilidad, etc.

Aunque en los apartados dedicados a este tipo de funciones no se hace mucho énfasis en mostrar al lector la importancia y la utilidad de estas funciones de manera implícita, en los tres textos se hace evidente su importancia en el estudio de conceptos matemáticos como límite, derivada, continuidad, etc., y en los textos 2 y 3, su utilidad para modelar situaciones de la vida real y de otras áreas del conocimiento.

Capacidades que se pretenden desarrollar en el estudiante

Al revisar los textos, se pudo evidenciar que en el 1 y el 2 no se presentan aprendizajes específicos para las funciones definidas a trozos, solamente se plantean cuáles deben ser los aprendizajes esperados en relación con el concepto general de función.

En el texto 3 se hace explícito lo que se quiere lograr con el estudio de las funciones definidas a trozos, manifestando que el estudiante debe identificarlas, hallarles sus puntos de discontinuidad, evaluar la función en cualquier punto de su dominio y reconocer

las situaciones que pueden modelarse con las funciones por partes.

Aunque en los tres textos no se hagan explícitos otros aprendizajes esperados, al revisar los ejemplos y ejercicios de cada texto, de manera implícita en ellos subyacen otros objetivos de aprendizaje, como realizar algunos procesos de conversión y tratamiento entre los diferentes modos de representación del concepto en cuestión, operar con las funciones definidas a trozos, reconocer y realizar correctamente procedimientos o algoritmos asociados con las funciones definidas a trozos.

Conclusiones

La descripción realizada permitió identificar una diferencia importante entre los textos seleccionados. La diferencia, está en el vocabulario que cada uno de ellos utiliza para la presentación de los contenidos. El texto 1 se caracteriza por un vocabulario formal, por hacer uso de teoremas de definiciones, axiomas e incluso demostraciones en la presentación de los conceptos; el texto 2, por su parte, aunque conserva formalidad a la hora de definir los conceptos, deja de un lado la presentación axiomática y las demostraciones en el estudio de los conceptos matemáticos; y el texto 3 hace una presentación menos formal en términos de vocabulario, se hace mayor uso del lenguaje coloquial que del lenguaje conjuntista para expresar ideas matemáticas. La explicación a esta discrepancia entre los textos, puede encontrarse en el momento histórico en que se editaron.

El haber seleccionado tres textos editados en el marco de una propuesta educativa diferente, permitió observar cómo influyen las propuestas educativas en el diseño de los textos y, así mismo, cómo éstos refle-

jan reformas educativas en determinado momento. En el texto 1, el cual se editó en el marco de la llamada "matemática moderna", los autores hacen explícito que este está diseñado especialmente para desarrollar el programa vigente para el grado once, el cual tiene como objetivo primordial involucrar al estudiante en el estudio de la lógica formal y la teoría de conjuntos, objetivo que coincide con los propósitos generales del texto. En el texto 2, el cual se editó en el marco de la evaluación por competencias propuesta por el ICFES, se hace explícito el interés por desarrollar competencias matemáticas (resolver problemas, interpretar gráficos y datos matemáticos, manejar los recursos tecnológicos, aplicar las matemáticas en distintos contextos) en los estudiantes. Por último, en el texto 3, el cual está diseñado de acuerdo con los lineamientos curriculares, se hace explícita la necesidad de desarrollar procesos de pensamiento en los alumnos, que les sean útiles en la vida para la toma de decisiones, además a cada ejercicio propuesto se le atribuye el desarrollo de un tipo de competencia (interpretativa, argumentativa o propositiva) y los procesos de la actividad matemática (conexiones, razonamiento lógico, resolución de problemas y comunicación) propuestos en los estándares y lineamientos curriculares.

En relación con el tratamiento que se da a las funciones definidas a trozos en los textos seleccionados, se encontró que los tres coinciden en presentar la definición de *función* a partir de la relación entre dos conjuntos y, por ende, asumir las funciones definidas a trozos como un caso particular de la misma. Pudo evidenciarse con este análisis, que dicha definición no es operativa en términos de las tareas y ejemplos que se proponen en los textos, puesto que en la mayoría de ellos subyace una interpretación de la función como dependencia y no una interpretación conjuntista (en el texto 3 se

propone una tarea en la que se debe utilizar la definición *función* para determinar si una expresión definida a trozos es o no función). Teniendo en cuenta lo anterior y de acuerdo con los planteamientos de Sierpiska (1992), podría afirmarse que la definición conjuntista no es la más adecuada para introducir el concepto de *función* a un nivel elemental, más bien debería presentarse una definición más informal que destaque la relación de dependencia entre las dos variables consideradas.

En los textos 2 y 3 se hace uso de expresiones que pueden prestarse para generar ideas erróneas en los estudiantes. En el texto 2, se utiliza la siguiente notación:

$$[G(f) = G_1(f_1) \cup G_2(f_2) \cup G_3(f_3) \cup \dots]$$

Esta notación se usa para expresar algebraicamente cómo es la representación gráfica de una función definida a trozos en términos de la representación gráfica de cada una de sus partes, y sugiere una composición de funciones mas no una forma de expresar que la gráfica de una función por partes es la unión de la representación gráfica de cada uno de los trozos que la componen. Por otro lado, en el texto 3, se afirma que si una "*función se define en forma diferente para cada uno de los intervalos en que se descompone el dominio, pero es constante en cada uno de ellos. Se dice que es una función definida a trozos*"; esta expresión se presta para deducir que las funciones definidas a trozos son sólo aquellas que est n definidas en cada partición por una expresión constante, lo cual no es cierto.

Por otro lado, se encontró que en ninguno de los textos se presentan ejemplos en los que el lector pueda evidenciar de

manera explícita cómo se da el paso de la representación verbal del concepto (presentada ésta no como una descripción, sino como una situación que puede ser modelada por medio de las funciones definidas a trozos) a la expresión algebraica. Este tipo de ejemplos son útiles en el estudio de las funciones definidas a trozos porque contribuyen a que el estudiante maneje tópicos relacionados con la lógica proposicional, nociones que son importantes para definir funciones a trozos. Además, este tipo de ejercicios contribuye a que el estudiante pueda darle un significado a las desigualdades en contextos no matemáticos.

En cuanto a los conceptos que preceden a las funciones definidas a trozos, se puede decir que aunque no es fundamental, sí es pertinente que, previo al estudio de estas funciones, se aborden todas aquellas funciones que se definen algebraicamente con una sola expresión, ya que comprenderlas contribuye a que el estudiante pueda reconocer y proponer diferentes funciones por partes y no sólo las que incluyen funciones polinómicas.

Antes del estudio de las funciones definidas a trozos, también es conveniente proponer tareas en las cuales se sugiera representar gráficamente funciones definidas por una sola expresión, que tengan su dominio restringido a un intervalo, puesto que este tipo de ejercicios permite familiarizar al estudiante con la representación gráfica del dominio de la función en el plano cartesiano.

Por último, la dificultad que se genera al pasar de la representación tabular a cualquier otro modo de representación, no implica que deba obviarse este trabajo, más bien, significa que se deben presentar ejemplos y ejercicios introductorios al tema de las funciones a trozos, en los que

el estudiante se enfrente con dicha dificultad y pueda evidenciar que no todas las relaciones de dependencia se rigen por una sola expresión algebraica, y que en ocasiones es difícil identificar la manera en que se relacionan las dos variables consideradas. El proponer tareas o ejercicios iniciales que conduzcan al estudiante a identificar características propias de estas funciones antes de formalizarlas (por ejemplo, tareas que lleven a los alumnos a identificar que la partición del dominio no implica que la expresión dada deje de ser una función), es una acción que contribuye a cambiar la manera de presentar los ejemplos y ejercicios en el tratamiento de las funciones definidas a trozos. ■

Bibliografía

- Azcarate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*. 10 (2), 135-149.
- Azcarate, C. y Deulofeu, J. (1996). *Funciones y gráficas*. Madrid, España: Editorial Síntesis.
- Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza de la secundaria* (95-124). Barcelona, España: Universidad de Barcelona, Instituto de Ciencias de la Educación.
- Chavez, H. y Castiblanco, S. (2000). *Matemáticas 11*. Bogotá, Colombia: Editorial Santillana.
- Espitia, L., García, G. y Serrano, C. (1997). *El concepto de función en textos escolares*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Font, V. (2005). *Funciones y derivadas*. Barcelona, España: Universidad de Barcelona, Instituto de Ciencias de la Educación.

- González, A., López, L. y Sierra, V. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria. *Revista Enseñanza de las ciencias*, 17 (3), 463-476.
- González, A., López, E. y Sierra, V. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Revista Educación Matemática*, 15 (1), 21-49.
- Guacaneme, E. et al. (1999). *Análisis de textos escolares de matemáticas*. Programa de formación permanente en Educación Matemática para la actualización y cualificación de docentes de los grados 6º y 7º. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Ortiz, J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. España: Universidad de Granada.
- Samper, C. y Leguizamón, C. (1999). Funciones a trozos: un camino hacia su comprensión. *Revista Educación Matemática*, 11 (1), 103-118.
- Samper, C. et al. (2005). *Espiral 11*. Bogotá, Colombia: Editorial Norma.
- Sánchez, G. y Contreras de la Fuente, A. (1998). Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: una perspectiva desde la noción de obstáculo. *Revista Enseñanza de las ciencias*, 16 (1), 73-84.
- Sierpinska, A. (1992). Sobre la comprensión de la noción de función. En E. Dubinsky y G. Harel. *The concept of function: some aspects of epistemology and pedagogy* (25-58). Washington, EE.UU: Mathematical Association of America. Traducción de César A. Delgado.
- Uribe, J., Berrio, J. y Osorio, G. (1985). *Elementos de matemáticas 11*. Bogotá, Colombia: Editorial Bedout.
- Vargas, C. (2003). La construcción de los irracionales de Dedekind como instrumento en un análisis de textos de octavo grado. *Revista de Ciencia y Tecnología* (14), 4-18.